Figures usuelles

I : Quelques Définitions

Nous avons vu au premier chapitre de géométrie la définition d'un segment. Voici donc quelques définitions supplémentaires:

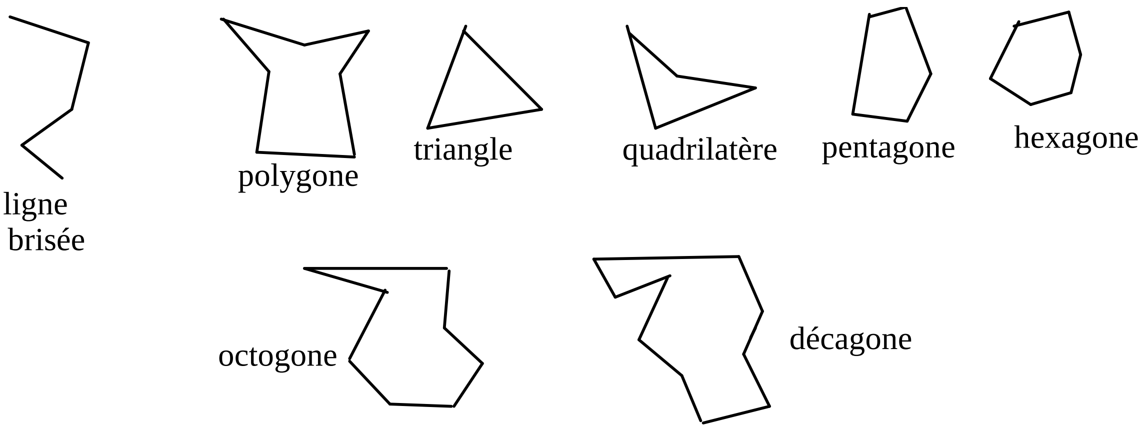
Ligne Brisée: c'est une succession de segments mis bout à bout.

Polygone: c'est une ligne brisée fermée.

Triangle: c'est un polygone à trois côtés.

Quadrilatère: c'est un polygone à quatre côtés.

Pentagone: c'est un polygone à cinq côtés.



Hexagone: c'est un polygone à six côtés.

Heptagone: c’est un polygone à sept côtés.

Octogone: c'est un polygone à huit côtés.

Ennéagone: c'est un polygone à neuf côtés.

Décagone: c'est un polygone à dix côtés.

Hendécagone: c'est un polygone à onze côtés.

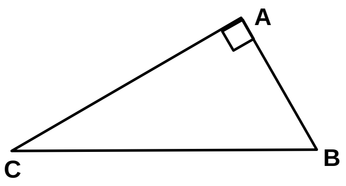
Dodécagone: c'est un polygone à douze côtés.

Une **diagonale** est un segment du polygone qui joint 2 points non consécutifs

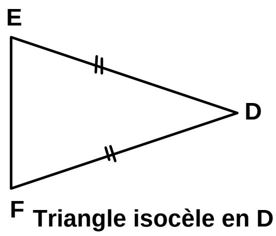
Un polygone est **croisé** quand les diagonales sont extérieures au polygone.

II : Triangles particuliers

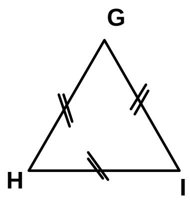
1.) Définitions



Triangle rectangle en A



Triangle isocèle en D



Triangle équilatéral

Un ***triangle rectangle*** est un triangle qui a un angle droit.

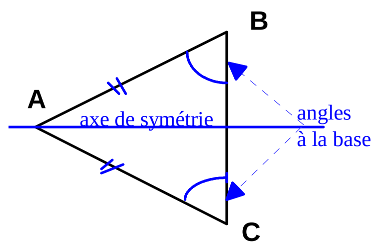
Un ***triangle isocèle*** est un triangle qui a deux côtés égaux.

Un ***triangle équilatéral*** est un triangle qui a ses trois côtés égaux.

2.) Propriétés

a) Triangle isocèle

Dans un triangle isocèle ABC dont le sommet principal est A, il a 2 côtés égaux AB et AC donc A est sur la médiatrice de [BC], qui est donc axe de symétrie.



Donc un triangle isocèle admet un axe de symétrie: **la médiatrice de la base**.

Et du fait de cette symétrie;

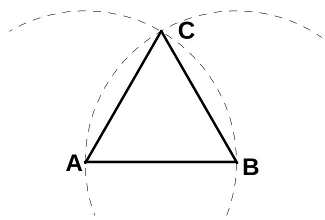
Les angles à la base sont égaux.

b) Triangle équilatéral

➔***Un triangle équilatéral est, en fait, 3 fois isocèle en prenant ses 3 côtés égaux 2 par 2.***

Donc, un triangle équilatéral admet 3 axes de symétrie: **les médiatrices de ses 3 côtés**.

Appelons O le point d'intersection des médiatrices de [AB] et [AC], on a alors OA = OB et OA = OC donc OA = OB = OC donc comme OB = OC, O est sur la médiatrice de [BC].



Donc les trois médiatrices de ce triangle passent par un même point.

Et aussi du fait de ces symétries:

Un triangle équilatéral a ses 3 angles égaux.

3.) Comment démontrer qu'on a....

a) Un triangle rectangle

Si un triangle a un angle droit alors c'est un triangle rectangle.

b) Un triangle isocèle

Si un triangle a deux côtés égaux, alors c'est un triangle isocèle.

Prenons maintenant un triangle ABC qui a deux angles égaux, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ **. Traçons la médiatrice du côté [BC], elle coupe (AB) en P. Considérons la symétrie par rapport à cette médiatrice. Dans cette symétrie B a pour image C, (AB) a pour image une droite passant par C et P puisque P est sur la médiatrice donc invariant. Du fait de la symétrie on sait que** $\widehat{ABC} = \widehat{PBC} = \widehat{BCP}$**, or** $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ **donc** $\widehat{BCP} = \widehat{ACB}$ **donc P est sur (AC) donc P est confondu avec A, qui est donc sur la médiatrice de [BC] et donc équidistant de B et C donc AB = AC donc ABC est isocèle**

Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.

c) Un triangle équilatéral

Si un triangle a trois côtés égaux alors c'est un triangle équilatéral.

Prenos maintenant un triangle qui a ses trois angles égaux. En prenant ces angles deux par deux on démontrerait que ce triangle est isocèle en A, puis en B et enfin en C donc il a bien trois côtés égaux et il est équilatéral.

Si un triangle a trois angles égaux, alors il est équilatéral.

III : Quadrilatères particuliers

➔***Attention : quand on nomme un quadrilatère, il faut lire les lettres en suivant le contour de ce quadrilatère.***
Donc ici on peut nommer le quadrilatère : ABCD ou BCDA ou CDAB ou DABC mais aussi ADCB ou DCBA ou CBAD ou BADC mais c'est tout.

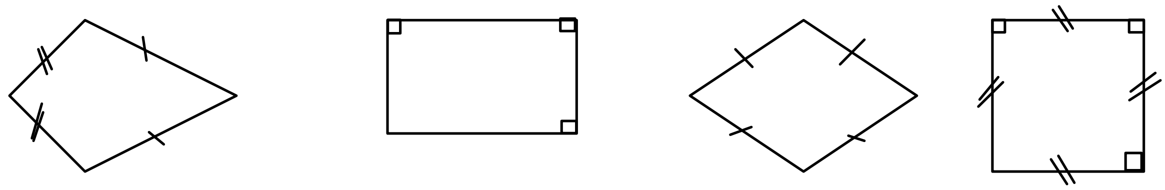
1.) Définitions

Un ***cerf-volant*** est un quadrilatère qui a deux côtés consécutifs égaux les deux autres étant aussi égaux entre eux.

Un ***rectangle*** est un quadrilatère qui a trois angles droits.

Un ***losange*** est un quadrilatère qui a quatre côtés égaux.

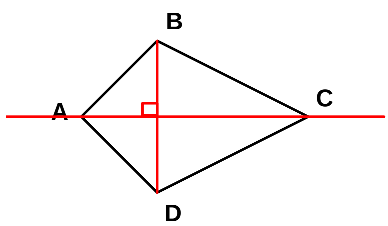
Un ***carré*** est à la fois un rectangle et un losange.



2.) Propriétés

a) Cerf-volant

Nous savons que AB = AD donc A est sur la médiatrice de [BC], et CB = CD donc C est sur la médiatrice de [BC], donc (AC) est la médiatrice de [BC] et donc comme les seuls points de ce quadrilatère qui ne sont pas sur (AC) sont B et C, (AC) est l'axe de symétrie de la figure.



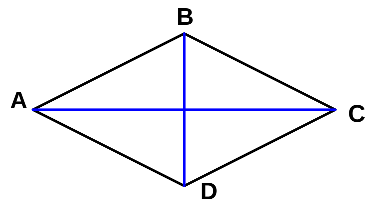
Donc le cerf-volant admet une diagonale comme axe de symétrie, diagonale qui est la médiatrice de l'autre diagonale.

Donc les diagonales d'un cerf-volant sont perpendiculaires.

Du fait de la symétrie les angles opposés $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont égaux.

b) Losange

Dans un losange tous les côtés sont égaux, donc AB=AD donc A est sur la médiatrice de [BD]. De même CB=CD donc C est aussi sur la médiatrice de [BD] qui est donc (AC). De même on démontrerait que (BD) est la médiatrice de [AC]. Donc les diagonales sont des axes de symétrie. Elles sont donc perpendiculaires et bissectrices des angles du losange. Elles se coupent en leur milieu.



De ce fait:

Un losange admet 2 axes de symétrie: ses 2 diagonales.

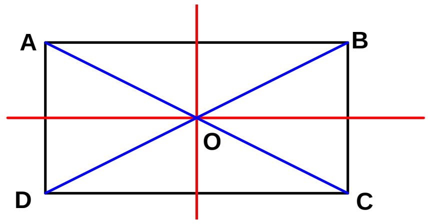
Dans un losange les diagonales sont perpendiculaires et ont le même milieu.

Dans un losange les diagonales sont bissectrices des angles du losange

c) Rectangle

(AB) et (CD) sont parallèles, car perpendiculaires à (BC) . Donc comme si 2 droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre la médiatrice de [AB] est perpendiculaire à (CD), donc parallèle ou confondue à celle de (CD).

Soit d la médiatrice de [AB]. Du fait que (AD) et (BC) sont perpendiculaires à (AB), d est parallèle à (AD) et comme (CD) est perpendiculaire à (AD) et (BC), d partage ABCD en 2 rectangles de mêmes dimensions donc d est aussi la médiatrice de [CD], et axe de symétrie du rectangle.



De même pour les 2 autres côtés.

Un rectangle admet 2 axes de symétrie perpendiculaires : les médiatrices des côtés.

Ces 2 axes se coupent en un point O, qui est à égale distance des sommets. De plus comme la symétrie conserve les angles $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ et $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$et comme la somme des 4 fait 360° la somme de 2 consécutifs fait 180°, donc O est le point d'intersection des diagonales.

Dans un rectangle, les diagonales ont le même milieu et la même longueur.

Les 2 axes de symétrie et les diagonales se coupent en un même point qui est le centre du rectangle.

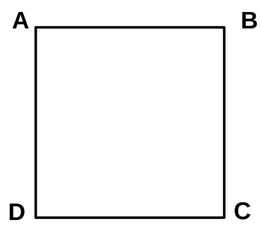
d) Carré

➔***Un carré est à la fois un losange et un rectangle.***

De ce fait nous avons:

Un carré admet 4 axes de symétrie :
les diagonales (comme tous les losanges);
les médiatrices des côtés (comme tous les rectangles).

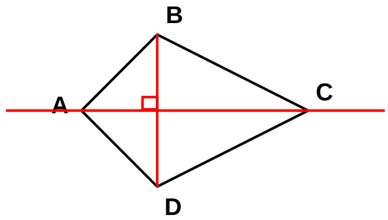
Dans un carré, les diagonales ont le même milieu, la même longueur, et sont perpendiculaires.



3.) Comment démontrer qu'on a un ....

a) Cerf-volant

Si deux côtés consécutifs sont égaux et les deux autres aussi, alors le quadrilatère est un cerf-volant.



Prenons un quadrilatère dont une des diagonales est la médiatrice de l'autre. (AC) est la médiatrice de [BD].

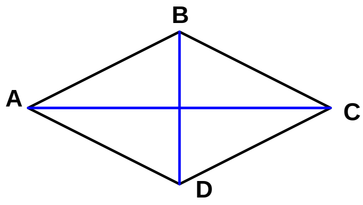
Dans ce cas A et C qui sont sur la médiatrice sont équidistants des deux autres points et alors AB = AD et CB =CD, ce qui nous donne bien un cerf-volant.

Si dans un quadrilatère une des diagonales est la médiatrice de l'autre alors le quadrilatère est un cerf-volant.

➔***Les diagonales perpendiculaires et les angles égaux ne suffisent pas à donner un cerf-volant.***

b) Losange

Si dans un quadrilatère les quatre côtés sont égaux alors le quadrilatère est un losange.



Prenons un quadrilatère dont les diagonales sont ses axes de symétrie.

Dans ce cas du fait des symétries par rapport à ses deux diagonales on démontre que les quatre côtés sont égaux.

Si dans un quadrilatère les diagonales sont des axes de symétrie, alors le quadrilatère est un losange.

Prenons un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

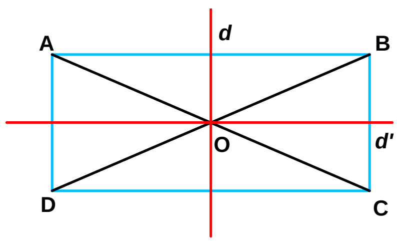
Dans ce cas les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre, donc A et C sont sur la médiatrice de [BD] et on a AB = AD et CB = CD

Mais on a aussi B et D sur la médiatrice de [AC], donc BA = BC et DA = DC, donc AB = BC = CD = AD

Si dans un quadrilatère les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, alors le quadrilatère est un losange.

c) Rectangle

Si dans un quadrilatère il y a trois angles droits alors le quadrilatère est un rectangle.



Prenons un quadrilatère dont les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu.

On a donc un quadrilatère ABCD tel que [AC] et [BD] se coupent en un point O, avec OA = OB = OC = OD.

On trace les bissectrices des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ **d et d'.**

Dans la symétrie par rapport à d A donne B, donc d est la médiatrice de [AB], donc d et (AB) sont perpendiculaires.
Et dans celle par rapport à d' B donne C donc (BD) et d' sont perpendiculaires.
Or on a déjà démontré dans un exercice que d et d' sont perpendiculaires donc, ayant trois angles droits, on a un rectangle, et ainsi (AB) est perpendiculaire à (BC), et ainsi de suite...

Si dans un quadrilatère les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu, alors c'est un rectangle.

d) Carré

Si un quadrilatère est à la fois un losange et un rectangle, alors c'est un carré.

➔***Il faut donc démontrer que c'est à la fois les deux.***